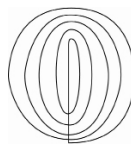


QUANTIFICAÇÃO

EDIÇÃO DE 2019 do

COMPÊNDIO EM LINHA DE PROBLEMAS DE FILOSOFIA ANALÍTICA

2018-2021 FCT Project PTDC/FER-FIL/28442/2017



Editado por
Ricardo Santos e Pedro Galvão

ISBN: 978-989-8553-22-5

Compêndio em Linha de Problemas de Filosofia Analítica
Copyright © 2019 do editor
Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa
Alameda da Universidade, Campo Grande, 1600-214 Lisboa

Quantificação
Copyright © 2019 do autor
André Nascimento Pontes

Todos os direitos reservados

Resumo

O presente artigo tem como objetivo realizar uma introdução geral ao tópico da quantificação em linguagens formais e, especialmente, na lógica de predicados. Ele está dividido em duas partes. Na primeira parte, apresento a sintaxe e a semântica dos quantificadores para a lógica de predicados. Na segunda parte, apresento um panorama de alguns dos principais problemas de ordem lógica e/ou filosófica envolvendo quantificadores, tais como a distinção entre interpretações objetual e substitucional dos quantificadores, a abordagem quantificacional da noção de existência, os critérios quineanos de compromisso ontológico e o problema da quantificação irrestrita.

Palavras-chave

Quantificação, sintaxe, semântica, existência, compromisso ontológico, generalidade absoluta, quantificação irrestrita.

Abstract

This paper aims to provide a general introduction to the subject of quantification in formal languages and mainly in predicate logic. It is divided into two parts. The first one presents the syntax and semantics of the quantifiers for predicate logic. The second part offers an overview on some of the major problems of logical and/or philosophical order involving quantifiers, such as the distinction between objectual and substitutional interpretation of the quantifiers, the quantificational approach to the notion of existence, the Quinean criteria of ontological commitment, and the problem of unrestricted quantification.

Keywords

Quantification, syntax, semantics, existence, ontological commitment, absolute generality, unrestricted quantification.

Quantificação

1 O que é uma quantificação?

Quantificadores são termos linguísticos, a exemplo de “todo”, “algum”, “nenhum”, “muitos”, dentre outros, usados para expressar o grau de generalidade da frase onde tais termos ocorrem. Por uma frase quantificada – ou simplesmente uma *quantificação* – entende-se uma frase linguisticamente bem formada contendo um quantificador. Exemplos são: “Todo ser humano é mamífero”, “Alguns triângulos são equiláteros”, “Nenhum elétron possui carga positiva” e “Muitos artistas são excêntricos”. Nessa acepção mais ampla, os quantificadores são objetos de interesse de áreas como a lógica, a matemática, a computação e a linguística. Portanto, os quantificadores são parte importante da constituição e estudo tanto das linguagens formais quanto das linguagens naturais.

Tendo em vista a amplitude do tema e a inviabilidade de esgotá-lo nos limites deste artigo, algum recorte se faz necessário. Meu objetivo aqui será, na maioria das vezes, realizar uma apresentação e análise panorâmica de algumas questões relevantes sobre quantificações em linguagens formais. Não obstante, as relações entre quantificações e linguagens naturais serão mencionadas ao longo do texto e, em especial, na seção sobre quantificadores generalizados. Embora não faça parte do meu objetivo principal, a investigação sobre a presença e o comportamento sintático e semântico de quantificadores na linguagem natural constitui um importante aspecto do debate sobre a quantificação.¹

Os quantificadores cumprem papel fundamental nas ciências formais desde a origem histórica da lógica como disciplina autônoma com Aristóteles na Grécia antiga. Aristóteles desenvolveu nos *Analíticos Anteriores* seu estudo de silogismos categóricos construindo uma lista pretensamente exaustiva de formas válidas de argumentos. Ele apresentou um conjunto de padrões de inferência correlacionando sentenças de quatro tipos básicos; todas elas com ocorrência de quantificadores: “Todo A é B”, “Nenhum A é B”, “Algum A é B” e “Algum

¹ Para um estudo sobre quantificações em linguagem naturais cf. Barwise e Cooper (1981) e Neale (1990).

A não é B”. Essas quatro sentenças básicas expressam, respectivamente, as seguintes sentenças categóricas: universal afirmativa, universal negativa, particular afirmativa e particular negativa. Além disso, o quadrado das oposições² – o famoso quadrado lógico –, amplamente usado para o estudo de características relevantes que podem ser encontradas nos silogismos aristotélicos, teve como principal contribuição explanatória expressar relações lógicas que ocorrem entre as quatro sentenças quantificadas acima. Exemplo de tais relações são: contrariedade, contraditoriedade, subalternidade, etc.

A ideia por trás do estudo empreendido por Aristóteles é a de verificar quais das combinações entre esses tipos de sentenças produzem argumentos válidos, i.e., argumentos cuja conclusão seja consequência lógica das premissas. Essas combinações – denominadas *silogismos* – são argumentos compostos por trios de sentenças onde as duas primeiras são as premissas e a terceira a conclusão. É digno de nota que Aristóteles foi o primeiro a usar variáveis em lógica, introduzindo assim a noção de esquema. Hoje, tal noção cumpre papel fundamental em nossa compreensão de validade e consequência dedutiva.

Atualmente, é bastante comum em lógica formal o entendimento de que um quantificador é um operador que determina o grau de satisfação de uma função proposicional – uma fórmula aberta – a ele associado com relação aos itens de um dado universo do discurso. Exemplos paradigmáticos desses operadores são os quantificadores universal (\forall) e existencial (\exists) da lógica de predicados desenvolvida a partir dos trabalhos de Frege.³ Em lógica de predicados, dada uma

² O chamado “quadrado das oposições” foi desenhado pela primeira vez por Apuleio, no século II dC.

³ De um ponto de vista histórico, Frege (1879) é certamente o responsável pelo moderno tratamento formal dos quantificadores. Ao apresentar na *Begriffsschrift* uma linguagem puramente simbólica capaz de expressar não só a matemática básica, mas também múltiplas formas de raciocínio, Frege ofereceu aos quantificadores uma sintaxe e uma semântica bem definida; corrigindo assim, para propósitos científicos, o que ele pensava ser algumas imperfeições presentes nas linguagens naturais. No entanto, a notação fregeana é consideravelmente distinta da nossa moderna notação, sendo dotada de componentes gráficos que tornam sua manipulação mais complexa com relação à notação atualmente usada. Para um amplo estudo da notação fregeana e do modo como ela se relaciona com a totalidade da filosofia de Frege cf. Landini (2012).

fórmula aberta qualquer φx , podemos fechá-la de dois modos distintos produzindo as seguintes sentenças quantificadas: (i) $\forall x \varphi x$, onde é afirmado que tudo é φ e (ii) $\exists x \varphi x$, de acordo com a qual existe algo que é φ , ou ainda, que existe pelo menos um φ . Em verdade, o sistema lógico desenvolvido originalmente por Frege possuía equivalente notacional apenas para o quantificador universal. No entanto, isso não constitui um problema, uma vez que o quantificador existencial pode ser obtido a partir do quantificador universal e de um operador de negação. Isso mostra que os quantificadores universal e existencial são interdefiníveis, como pode ser verificado na nossa moderna notação através das seguintes classes de equivalência:

$$\forall x \varphi x \equiv \neg \exists x \neg \varphi x$$

$$\exists x \varphi x \equiv \neg \forall x \neg \varphi x$$

Frege concebeu a teoria da quantificação de modo a substituir o par linguístico *sujeito-predicado* pela distinção lógica, e, de acordo com ele, mais fundamental, *função-argumento*. Para Frege, os quantificadores expressam um tipo especial de função, a saber, uma função de ordem superior que toma conceitos como argumentos e obtém valores de verdade — o *Verdadeiro* e o *Falso* — como valores da função.⁴ Ressaltando que Frege já tinha definido em *Über Begriff und Gegenstand* conceitos de primeira ordem como funções de objetos em valores de verdade. Nesse sentido, Frege tem uma visão em parte formal, em parte ontológica de quantificadores. Tal visão está distante daquela

⁴ Um interessante aspecto dos quantificadores universal e existencial destacado por Peters e Westerståhl (2006: 28) é que, do modo como eles foram apresentados na teoria dos silogismos categóricos de Aristóteles, em cada sentença quantificada há a ocorrência de dois termos predicativos. A rigor, Peters e Westerståhl afirmam que, nesse contexto, podemos entender um quantificador como estabelecendo uma relação binária entre dois conceitos. Além disso, essa relação pode ser explanada extensionalmente como uma relação entre dois conjuntos, uma vez que conjuntos são comumente usados para expressar a extensão de conceitos. Por exemplo, a expressão ‘alguns’ pode ser vista como a intersecção não vazia entre dois conjuntos e a expressão ‘todo’ pode significar a relação de inclusão. Essas relações são estabelecidas entre conjuntos de indivíduos e não entre indivíduos. Isto significa que estas relações são de segunda ordem. Essa análise de Peters e Westerståhl certamente apoia a tese fregeana de que quantificadores são predicados ou conceitos de ordem superior.

apresentada no início do presente texto que entende os quantificadores meramente como expressões linguísticas de um dado tipo.

Embora não seja expressamente afirmado nos textos fregeanos, penso que a noção de conceito defendida por Frege (1891; 1892) – seja a de conceito de primeira ordem ou de ordem superior – pode ser expressa naquilo que os matemáticos chamam de *função característica*, a saber, uma função que mapeia um determinado domínio em um contradomínio dotado de apenas dois elementos que figurarão como os únicos valores possíveis da função.⁵ Tal função pode ser apresentada algebricamente de acordo com as seguintes condições:

(*) Um conceito P é uma função unária $c: D \mapsto \{V, F\}$, tal que dado qualquer objeto $a \in D$ que figura como argumento da função, a mapeia V caso Pa e, inversamente, mapeia F caso $\neg Pa$.

(**) Um conceito R expressa uma função de dois argumentos $r: D \times D \mapsto \{V, F\}$, tal que dado qualquer para ordenado (m, n) , onde $m, n \in D$, (m, n) mapeia V caso Rmn e, inversamente, mapeia F caso $\neg Rmn$.

Em (*) temos uma elucidação da noção de conceito entendido enquanto um predicado unário, ao passo que em (**) está caracterizado um conceito binário, ou ainda, uma relação binária. Se introduzirmos os ajustes necessários em (**), podemos generalizar o enunciado para relações de múltiplas aridade.

Desse modo, os quantificadores operam como funções, tais como $\forall x(\dots)$ e $\exists x(\dots)$, onde a posição do argumento (...) deve ser preenchida por uma letra predicativa expressando um conceito de ordem inferior ao quantificador. Esse preenchimento resulta em uma verdade ou uma falsidade como valor final. Na moderna teoria dos modelos, a sentença resultante do preenchimento de (...) será avaliada com base em um determinado universo do discurso. Por exemplo, assumindo como universo do discurso o intervalo numérico fechado na série dos naturais $0 \leq x \leq 10$ e as letras predicativas P para “ x é um número par” e Q para “ $x \leq 10$ ”, as sentenças quantificadas

⁵ Eu estou aqui pressupondo do leitor certo conhecimento do que seja um domínio. Mais adiante eu terei mais a dizer sobre essa noção, no que ela consiste e qual sua importância para a sintaxe e a semântica dos quantificadores.

$$\forall x(Qx)$$

$$\exists x(Qx)$$

$$\exists x(Px)$$

produzem todas o *Verdadeiro* como valor. Ao passo que a sentença quantificada

$$\forall x(Px)$$

produz o *Falso* como valor. Com isso, para os casos acima, a função $\forall x(\dots)$ comporta os seguintes pares ordenados: (P, F), (Q, V). Ao passo que a função $\exists x(\dots)$ comporta os pares ordenados (P, V), (Q, V). Nesse contexto, V e F são, respectivamente, abreviações para os valores de verdade *Verdadeiro* e *Falso* que, na semântica fregeana, constituem objetos lógicos. Posteriormente, tentarei mostrar com base na semântica para quantificadores da lógica de predicados que uma quantificação será sempre associada a um modelo que deve ser entendido como composto por um domínio e uma função interpretativa.

É importante ressaltar aqui que minha abordagem de Frege não é uma exegese de sua obra e, portanto, não levanta a pretensão de ser uma apresentação inteiramente fiel das teses fregeanas sobre quantificações e a noção mais ampla de função. Muitas vezes apelo para anacronismos com relação ao trabalho de Frege com a finalidade meramente didática de dar uma maior coesão com relação à sintaxe e à semântica que apresentarei a seguir. Uma observação importante a ser feita é a de que esse modo de entender uma quantificação enquanto relativa a um domínio e, em última instância, a um modelo, constitui uma compreensão semântico-modelista para quantificadores. A esse modo de interpretar os quantificadores chamarei “semântica padrão”. Essa compreensão dos quantificadores não está presente nos trabalhos de Frege, uma vez que sua intenção primária ao desenvolver a lógica de predicados era oferecer uma linguagem ideal a partir da qual fosse possível formalizar e axiomatizar a aritmética. Nesse sentido, Frege entendeu sua teoria da quantificação a partir de uma linguagem completamente interpretada, ou seja, uma linguagem que não admite variação de interpretações; diferentemente do que ocorre usualmente na teoria dos modelos. Como destaca Shapiro (1991: 11), a semântica completamente interpretada de

Frege não possui espaço para termos não lógicos cujos referentes poderiam variar de modelo em modelo dependendo da interpretação que dêssemos a esses termos e do domínio que assumíssemos para as quantificações.

A mudança de enfoque realizada por Frege em favor da distinção função-argumento certamente representou uma revolução para a constituição e o tratamento das linguagens formais. Em primeiro lugar, dado o fato de que nem toda sentença pode ter sua forma lógica expressa em termos do par sujeito-predicado, limitar a lógica a essa distinção linguística reduz drasticamente o poder de expressão das linguagens formais. Além disso, dado que pode haver funções com mais de um argumento, a distinção fregeana também tem a virtude de expressar – por meio de funções – relações de diferentes aridades.

É também bastante comum em manuais de lógica associar os quantificadores universal e existencial, respectivamente, a conjunções e disjunções. Numa quantificação, se uma variável x ligada percorre um domínio de a_n objetos, as sentenças universal e existencialmente quantificadas poderiam ser parafraseadas nos seguintes termos:

$$\forall x \varphi x \equiv \varphi_{a_1} \wedge \varphi_{a_2} \wedge \varphi_{a_3} \wedge \dots \wedge \varphi_{a_n}$$

$$\exists x \varphi x \equiv \varphi_{a_1} \vee \varphi_{a_2} \vee \varphi_{a_3} \vee \dots \vee \varphi_{a_n}$$

Não obstante, essa maneira de entender os quantificadores funciona de forma bem-comportada apenas nos casos onde o universo do discurso da quantificação é finito, ou seja, quando o conjunto que a variável quantificada percorre contém uma quantidade finita de objetos; como é o caso nas equivalências acima mencionadas. Quando lidamos com domínios infinitos, especialmente os domínios infinitos não enumeráveis, como é o caso, por exemplo, do conjunto \mathbb{R} dos números reais, essas disjunções e conjunções não podem ser explanadas exaustivamente, forçando assim em algum momento o uso de alguma expressão – tal como “...” ou “etc.” – para indicar que a conjunção ou disjunção em questão prossegue *ad infinitum*. No entanto, a presença dessas expressões retoma, mesmo que implicitamente, o uso de alguma generalidade que só pode ser explicitada por intermédio de um quantificador.

No que segue, pretendo esboçar um quadro de compreensão do que sejam os quantificadores e as quantificações. Para isso, apresento primeiramente os traços gerais da sintaxe e da semântica dos quantificadores no contexto da lógica de predicados de primeira ordem. Num segundo momento, tento descrever um conjunto de problemas tanto de ordem lógica quanto filosófica acerca da quantificação. Se meus objetivos forem alcançados, ao final do texto, o leitor poderá ter um panorama introdutório da pesquisa de caráter técnico e filosófico sobre o tópico da quantificação.

2 A sintaxe e a semântica dos quantificadores

A sintaxe e a semântica dos quantificadores universal (\forall) e existencial (\exists) só podem ser devidamente compreendidas no contexto mais geral da linguagem na qual eles estão inseridos, a saber, a lógica de predicados [de primeira e/ou segunda ordem]. No que segue, irei apresentar sintaxe e semântica sem destinar subseções específicas para cada uma delas. Em alguns casos, sintaxe e semântica serão apresentadas conjuntamente através de suas correlações.

Por motivos de simplificação, a sintaxe dos quantificadores será apresentada aqui nos termos da lógica de predicados de primeira ordem (LPPO). O alfabeto da LPPO é composto pelos seguintes símbolos:

- (i) *Conectivos*: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ e \neg .
- (ii) *Variáveis individuais*: x, y, z, \dots
- (iii) *Letras predicativas*: $P_{x_1}, Q_{x_1x_2}, \dots, R_{x_1, \dots, x_n}$, para predicados de múltiplas aridades onde cada x_i subscrito à letra predicativa representa uma variável ajudando a expressar a aridade do predicado em questão.
- (iv) *Constantes individuais*: a, b, c, \dots , que, na semântica da LPPO, designarão nomes de indivíduos pertencentes ao domínio assumido.
- (v) *Parâmetros individuais*: um parâmetro individual μ é um termo distinto das constantes individuais, pois podem representar um ou mais indivíduos do domínio que satisfaçam determinadas condições, mas sem que possamos precisar quem

é(são) esse(s) indivíduo(s).

- (vi) *Símbolos auxiliares*: parênteses esquerdo “(” e direito “)”.
- (vii) Quantificadores: quantificador universal (\forall) e existencial (\exists).

A LPPO é comumente suplementada com o sinal “=” de identidade. A partir do alfabeto apresentado acima podemos definir recursivamente as fórmulas bem formadas (*fbf*) da LPPO de acordo com as seguintes regras:

F_1 : Uma letra predicativa φ sucedida por uma sequência finita a_1, \dots, a_n de variáveis, constantes ou parâmetros individuais é uma *fbf*.

O valor de n na sequência de constantes e parâmetros determinará a aridade do predicado expresso por φ . Para $n = 1$ temos um predicado unário; para $n = 2$ temos predicado relacional binário; e assim por diante.

F_2 : Sendo ε e δ *fbf*, então $\neg\varepsilon$, $\varepsilon\wedge\delta$, $\varepsilon\vee\delta$, $\varepsilon\rightarrow\delta$ e $\varepsilon\leftrightarrow\delta$ são *fbf*.

F_3 : Sendo ε uma *fbf* onde ocorre uma variável individual x , então $\forall x\varepsilon$ e $\exists x\varepsilon$ são *fbf*.

F_4 : Nada mais é uma *fbf* da LPPO. [Chamada de cláusula de fechamento]

A regra F_3 mostra que quantificadores são operadores que ligam variáveis livres (*variable-binding operators*) na medida em que, por exemplo, numa fórmula $\forall x\varepsilon$ o quantificador \forall liga toda ocorrência livre da variável x na fórmula ε .

Já, de um ponto de vista filosófico mais amplo, as letras predicativas e as constantes individuais podem ser entendidas de maneira satisfatória, respectivamente, como contrapartes notacionais em LPPO do que Frege chamou em *Über Begriff und Gegenstand* de *conceito* e *objeto*. Isso fica claro ao verificarmos que os predicados operam de maneira similar a funções, ao passo que constantes individuais operam como termos singulares, ou seja, nomes para objetos específicos.

As regras de inferência envolvendo quantificadores são, algumas bastante simples, outras mais complexas e até mesmo polêmicas. Em dedução natural, elas são comumente divididas em regras de introdução

e eliminação de quantificadores. Vejamos quais são elas:

Introdução do Quantificador Existencial ($+\exists$)

φa

$\exists x \varphi x$

Sendo uma das mais compreensíveis e intuitivas regras de inferência para quantificadores, a regra ($+\exists$) afirma basicamente que se há uma premissa no argumento em questão de que a é um φ , ou ainda, uma prova no argumento de que a é um φ – e sendo a uma constante individual, o nome para um objeto específico do domínio –, então temos uma prova de que há pelo menos um φ . Por exemplo, se é provado que “Sócrates é filósofo”, então temos uma prova de que “Há pelo menos um filósofo”.

Eliminação do Quantificador Existencial ($-\exists$)

$\exists x \varphi x$

$\varphi \mu$

Na regra ($-\exists$) o termo μ ocorre como um parâmetro individual, ou seja, um termo que opera representando um ou mais indivíduos que satisfaçam φ sem que saibamos ou precisemos identificar o(s) indivíduo(s) no universo do discurso. A regra ($-\exists$) estabelece que uma vez provado que há pelo menos um indivíduo que é um φ , podemos nomear esse indivíduo que é φ por intermédio de um parâmetro individual. Um exemplo não técnico e um pouco dramático pode ser dado para ajudar na compreensão de como a introdução de parâmetros individuais opera na ($-\exists$). Em 1888, em Londres, uma série de assassinatos de mulheres ocorreu no distrito de Whitechapel. Dado as características similares das mortes, os investigadores da época encontraram fortes evidências de que todos os crimes foram cometidos por uma única pessoa. Em realidade, tais crimes nunca foram solucionados. Até hoje não sabemos ao certo quem cometeu os assassinatos, mas entrou para o imaginário popular o apelido dado pela polícia e imprensa da época ao famigerado assassino: *Jack, O Estripador*. Esse procedimento é similar ao estabelecido em ($-\exists$). Dado que é verdadeiro que “Há um indivíduo responsável pelos assassinatos em Whitechapel”, embora não saibamos quem exatamente ele é, podemos,

para efeito de inferência, apelidá-lo convencionalmente de “Jack, O Estripador”. Desse modo, podemos inferir a sentença “Jack, O Estripador, é responsável pelos assassinatos em Whitechapel”.

Do ponto de vista técnico, há uma restrição ao uso do parâmetro individual na regra ($-\exists$). No contexto do argumento, tal parâmetro não pode ter ocorrido em nenhuma premissa prévia. A introdução dessa restrição pode ser facilmente compreendida se imaginarmos a situação onde se apelida o desconhecido assassino de Whitechapel com um nome de um indivíduo conhecido na cidade e sobre o qual já possuímos crenças prévias; suponhamos, George, o presidente do Comitê de Vigilância do distrito. Do contrário, poderíamos inferir equivocadamente que “George é o responsável pelos assassinatos de Whitechapel”, ou ainda, que “O Presidente do Comitê de Vigilância do distrito é o responsável pelos assassinatos de Whitechapel”.

Vale ressaltar que, embora o exemplo acima trate de um caso onde apenas um indivíduo satisfaz a condição φ , podemos usar parâmetros para exemplificar situações onde mais de um indivíduo satisfaça uma determinada condição. Isso é legítimo, pois um parâmetro é um designador provisório e não fixado. Ele é como um apelido que damos a um indivíduo específico que satisfaz uma dada condição, ou ainda, um apelido para um indivíduo não fixado pertencente a um conjunto de indivíduos que satisfazem, todos, uma mesma condição.

Eliminação do Quantificador Universal ($-\forall$)

$\forall x\varphi x$

φv

onde o termo v é introduzido de modo a representar uma constante individual tomada arbitrariamente. Em outras palavras, v opera apenas na explicitação de ($-\forall$) como uma variável para constantes individuais e, portanto, não conta como um símbolo da LPPO, mas de sua metalinguagem. A regra ($-\forall$) afirma que, caso uma das premissas revele que todo objeto é um φ — ou ainda, que haja uma prova ao longo do argumento para tal afirmação —, então há uma prova de que a instanciação da quantificação universal resulta em uma sentença verdadeira para qualquer constante individual no universo do discurso em questão.

Introdução do Quantificador Universal ($+\forall$)

φv

$\forall x \varphi x$

Na regra ($+\forall$), v opera novamente nos mesmos termos definidos em ($-\forall$), ou seja, ele apenas representa uma constante individual tomada arbitrariamente. Além disso, para que seja utilizado satisfatoriamente em ($+\forall$), φv deve ter sido previamente introduzida no argumento por intermédio da regra de eliminação do quantificador universal ($-\forall$). Logo, a fórmula φv não pode ocorrer em nenhuma das premissas iniciais – também nomeadas de *hipóteses* – do argumento onde ela ocorre. É precisamente o fato de que φv foi introduzida previamente por aplicação da regra ($-\forall$) que garante que toda substituição em φv de v por uma constante individual no discurso deve resultar em uma sentença verdadeira.

Muito além das regras acima apresentadas, inúmeros problemas de ordem lógica e filosófica surgem da tentativa de justificar ou excluir determinadas inferências realizadas a partir de sentenças quantificadas. Por exemplo, a inferência

(!) $\forall x \varphi x$

$\exists x \varphi x$

é bastante controversa, uma vez que (!) permite concluir uma afirmação existencial da pura lógica. Como isso poderia ser possível? Assumindo um universo de discurso vazio para a quantificação, é vacuamente verdadeiro nesse universo que $\forall x \varphi x$, pois não é possível demonstrar $\exists x \neg \varphi x$. No entanto, dado que o universo assumido é vazio, também não é possível demonstrar $\exists x \varphi x$. Portanto, em universos e discurso vazios a inferência (!) não é válida. Por exemplo, sabendo que em minha família não há nenhum astronauta, a sentença

“Todo astronauta em minha família é engenheiro”,

é vacuamente verdadeira, pois sua verdade deve-se às leis da lógica clássica e ao fato de que sua contraditória,

“Há pelo menos um astronauta em minha família que não é engenheiro”,

é falsa. Não obstante, nesse mesmo contexto, estamos igualmente não legitimados a inferir que

“Há pelo menos um astronauta em minha família que é engenheiro”.

Afinal, não há astronautas em minha família. Apesar de trabalharmos nos moldes clássicos da LPPO, onde sempre o universo do discurso é não vazio, a mera possibilidade de falha da regra (!) em contextos de vacuidade produz uma mancha suficientemente grande sobre seu pretenso caráter lógico.⁶ Afinal, se uma inferência é lógica ela não pode depender da quantidade de objetos que existem no mundo.⁷

Para uma melhor compreensão do que está sendo dito acima, é importante ter clareza sobre o que vem a ser o universo do discurso. Em semântica formal, chamamos esse universo a partir do qual nossas sentenças serão avaliadas de *domínio da quantificação*; e, no âmbito do presente artigo, isso certamente nos faz mergulhar no estudo da semântica dos quantificadores da lógica da LPPO.

Em linhas gerais, um domínio é um agregado $D = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – que, embora seja apresentado aqui de maneira finita, pode também ser infinito – o qual denominei anteriormente informalmente de *universo do discurso*. Cada membro a_i de D é dito um objeto do domínio. É com base no domínio que podemos definir ou interpretar as propriedades, relações e os demais itens não-lógicos assumidos por L . Além disso, por um *modelo* M para uma linguagem L entendemos uma estrutura ou um par $\langle D, I \rangle$, onde D é o domínio e I é uma função interpretativa que associa: cada constante individual de L a um, e somente um, membro a_i de D ; cada predicado monádico de L a um, e somente um, subconjunto de membros a_i de D e, por fim, cada

⁶ Em contextos de discurso cotidiano em linguagem natural, sentenças universalmente quantificadas e vacuamente verdadeiras são raras, pois nossas afirmações carregam quase sempre a implicatura conversacional de que o universo do discurso não é vazio. Se um amigo me diz “todas as mulheres com que me relacionei são inteligentes”, costumo dispensar a interpretação de que a sentença pode ser vacuamente verdadeira e assumo automaticamente que há pelo menos uma mulher que se relacionou com o amigo em questão. No entanto, a implicatura conversacional é um recurso extra lógico, ou mesmo pragmático. Do ponto de vista puramente lógico, ainda é justificável o desconforto com a regra (!).

⁷ Para uma crítica a essa tese cf. Etchemendy (1990); especialmente o capítulo 8.

predicado n -ário de L (sendo $n \geq 2$) a um, e somente um, conjunto de n -úplas ordenadas formada por membros a_i de D .

Desse modo, as operações semânticas fundamentais de L podem ser definidas com base na noção de domínio entendido enquanto conjunto. Vejamos em mais detalhe. Cada predicado monádico φ sintaticamente bem formado de L deve selecionar um subconjunto de D composto exclusivamente por todos os membros de D que, de acordo com a interpretação I assumida no modelo M ao qual o domínio em questão pertence, satisfazem φ .

De modo análogo ao que ocorre com os predicados monádicos, cada predicado binário de L estabelece uma relação R definida em L que seleciona um conjunto de pares ordenados (x, y) de membros de D que, de acordo com a interpretação I assumida no modelo M ao qual o domínio em questão pertence, satisfazem Rxy ; e assim por diante para cada predicado n -ário de L . O comportamento de predicados unários e as demais relações descritas por L podem ser sintetizadas da seguinte forma: cada predicado de aridade n – para $n \geq 1$ – de L determina um conjunto C de n -úplas ordenadas, onde todos os elementos que compõem as n -úplas ordenadas de C pertencem ao domínio associado a L . Desse modo, a função interpretativa I garante que todo predicado sintaticamente bem definido deve estar associado a uma extensão definida a partir de D .

Podemos aqui introduzir as condições de *verdade em um modelo* $M = \langle D, I \rangle$ para o caso da LPPO. Assumindo as letras V e F , respectivamente, para verdadeiro e falso, e ν para representar uma valoração estabelecida com base na função interpretativa I . Nós também podemos ampliar nossa linguagem sempre com vista a permitir que, para todo item $d \in D$, haja uma constante k_d , tal que, $\nu(k_d) = d$. Tal linguagem ampliada é a linguagem de I , que chamaremos $L(I)$. As condições de verdade das fórmulas fechadas podem ser apresentadas do seguinte modo:

Fórmulas atômicas.

$$\bullet \nu(\varphi k_1, \dots, k_n) = V \Leftrightarrow \nu(k_1), \dots, (k_n) \in \nu(\varphi). \text{ Contrariamente,}$$

$$\nu(\varphi k_1, \dots, k_n) = F.^8$$

Fórmulas quantificadas.

- $\nu(\forall x \varphi x) = V \Leftrightarrow$ para todo $d \in D$, $\nu(\varphi k_d) = V$. Caso contrário, $\nu(\forall x \varphi x) = F$.
- $\nu(\exists x \varphi x) = V \Leftrightarrow$ para pelo menos um $d \in D$, $\nu(\varphi k_d) = V$. Contrariamente, $\nu(\exists x \varphi x) = F$.

Uma fórmula f de uma linguagem L – isso obviamente inclui LPPO – é uma *verdade lógica* quando $\nu(f) = V$ em todos os modelos M de L . Além disso, f é uma *contradição* quando $\nu(f) = F$ em todos os modelos M de L . Por fim, f é uma fórmula satisfatível quando $\nu(f) = V$ para pelo menos um modelo M de L .

A noção de satisfação em um modelo pode ser estendida a um conjunto de fórmulas. Dizemos que Γ é um *conjunto de fórmulas satisfatíveis* caso haja pelo menos um modelo M que satisfaça todas as fórmulas de Γ , ou seja, quando toda fórmula $\gamma \in \Gamma$, $\nu(\gamma) = V$ no modelo M em questão. Um importante resultado denominado *teorema da compacidade* afirma que o conjunto Γ é ele próprio satisfatível em um modelo M caso todos os subconjuntos finitos de Γ sejam igualmente satisfatíveis em M .

A teoria dos modelos desenvolvida ao longo do século XX, especialmente por lógicos como Alfred Tarski, em consonância com a teoria dos conjuntos consagrou a visão de que um domínio D de uma linguagem L deve ser entendido precisamente enquanto o agregado de objetos. Por exemplo, os modelos da LPPO são construídos, como vimos acima, a partir de uma função de interpretação aplicada ao domínio D entendido como um conjunto. Com isso, se operamos formalmente com os quantificadores de maneira satisfatória, devemos então associar toda sentença quantificada a um domínio D pressuposto pela linguagem à qual a sentença pertence. Por fim, esse domínio deve ser entendido invariavelmente como um conjunto.

⁸ As condições de verdade para as fórmulas contendo conectivos, ou seja, as fórmulas moleculares, podem ser determinadas *mutatis mutandis* como descritas na Lógica Proposicional.

3 Quantificadores generalizados

É bastante comum caracterizar os desenvolvimentos da lógica formal do final do século XIX e, especialmente, das primeiras décadas do século XX como fundados em um amplo programa de refinamento e correção das limitações e ambiguidades presentes nas linguagens naturais. Enquanto uma ciência, e tomando o termo “ciência” aqui em um sentido amplo, a lógica formal estabeleceu relações entre as diversas linguagens artificialmente criadas e as linguagens naturais visando as possíveis vantagens da formalização destas últimas. No entanto, rapidamente verificou-se a resistência que algumas porções das linguagens naturais exerciam ao tratamento nos termos de operadores estabelecidos pelas linguagens formais até então disponíveis; fato que demandou uma crescente sofisticação dos recursos presentes nos mais diversos sistemas lógicos. É nesse contexto geral que se insere o tópico dos quantificadores generalizados.

Atualmente, um importante fragmento das pesquisas desenvolvidas por lógicos e linguistas a respeito da quantificação trata dos chamados quantificadores generalizados. Por “quantificadores generalizados” devemos entender aqui quantificadores que foram introduzidos como generalizações dos quantificadores da lógica de predicados para poder dar conta da sintaxe e semântica de quantificações que estão para além da capacidade expressiva dos operadores \forall e \exists da lógica de predicados. Algumas quantificações em linguagens naturais, e mesmo em linguagem matemática, não podem ser satisfatoriamente formalizadas estritamente com base nos quantificadores da lógica de predicados. A noção de quantificadores generalizados surge nesse contexto como parte da tentativa de tratar tais quantificações. Exemplos são:

“A maioria dos números não são primos”.

“Mais da metade dos alunos faltou à aula”.

“Muitos dos eleitores de direita defendem o Estado mínimo”.

Obviamente, o conceito de quantificação compreende um fenômeno linguístico muito mais amplo do que o expresso pelos operadores \forall e \exists da lógica de predicados. Em grande parte, a lógica formal foi desenvolvida sendo margeada por discussões a respeito de suas semelhanças e diferenças com relação às linguagens naturais; e essas

discussões se mostram também presentes na literatura sobre a quantificação. O pano de fundo que permeia esse debate tenta estabelecer as vantagens e limitações das linguagens formais com relação às linguagens naturais.

Em linguagens formais, é comum o apelo a recursos matemáticos – e.g. conjuntos, relações, funções, estruturas, etc. – que são introduzidos como correlatos formais de expressões e entidades linguísticas presentes ou pressupostas pelo discurso formulado em linguagem natural. No entanto, apesar do caráter universal da lógica, muitas expressões da linguagem natural – e mesmo de partes específicas do discurso científico e matemático – oferecem forte resistência a um tratamento estritamente formal. Isso ocorre também com as múltiplas formas de quantificações presentes nas linguagens naturais e em partes importantes do discurso matemático.

Em um célebre trabalho publicado em 1957 e intitulado *On a generalization of quantifiers*, Mostowski tratou de quantificadores matematicamente interessantes, mas que não poderiam ser expressos em termos dos quantificadores universal e existencial. Dado que esses quantificadores constituíam generalizações dos quantificadores lógicos, eles passaram a ser chamados de “quantificadores generalizados”. Já no que diz respeito mais estritamente a quantificadores das linguagens naturais, Montague (1974) defendeu a tese de que determinadas expressões substantivas da língua inglesa podem se comportar como quantificadores generalizados. Seguindo a mesma linha de raciocínio de Montague, Barwise e Cooper (1981) também possuem um influente trabalho sobre a relação entre quantificadores generalizados e expressões das linguagens naturais. Essas duas classes de trabalhos em torno dos quantificadores generalizados expressam duas linhas de abordagem do problema, a saber, (i) a tentativa de formalizar quantificações relevantes à prática matemática que, no entanto, fogem ao escopo clássico dos operadores \forall e \exists ; e (ii) estabelecer relações entre quantificações da linguagem natural e das linguagens formais para além dos quantificadores universal e existencial tomados em sua interpretação clássica.

Barwise e Cooper (1981) entendiam um quantificador como um operador mais amplo do que os operadores clássicos \forall e \exists . Um quantificador generalizado seria expresso sintaticamente por uma expressão $D\eta$, onde D opera como um *determinador* e η é um conjunto de

termos ou de indivíduos. Desse modo, dado um modelo

$$\mathbf{m} = \{S, \parallel \parallel\}$$

onde S é o domínio e $\parallel \parallel$ é uma função de atribuição, $\parallel D\eta(X) \parallel$ denotará um conjunto de indivíduos dados pelos subconjuntos X de S para os quais a expressão $D\eta(X)$ é satisfeita. Com isso, podemos expressar alguns determinadores recorrentes em linguagens naturais de maneira elegante da seguinte forma:⁹

$$\parallel \text{todos } \eta \parallel = \{X \subseteq S / \parallel \eta \parallel \subseteq X\}$$

$$\parallel \text{alguns } \eta \parallel = \{X \subseteq S / \parallel \eta \parallel \cap X \neq \emptyset\}$$

$$\parallel \text{muitos } \eta \parallel = \{X \subseteq S / \parallel \parallel \eta \parallel \cap X \parallel > \parallel \parallel \eta \parallel - X \parallel\}$$

$$\parallel \text{exatamente um } \eta \parallel = \{X \subseteq S / \parallel \eta \parallel \cap X = 1\}$$

$$\parallel \text{a maioria } \eta \parallel = \{X \subseteq S / \parallel \eta \parallel > \parallel S - X \parallel\}$$

De acordo com van Benthem (1983), e seguindo essa mesma linha notacional acima, um quantificador generalizado denota uma função D – ou ainda, o que chamamos anteriormente de um *determinador* –, que atribui, para um dado domínio S , uma relação binária entre seus subconjuntos. Desse modo, em um modelo com domínio S , a expressão “todo X é Y ” denota a sentença $X \subseteq Y$, “nenhum X é Y ” denota a sentença $X \cap Y = \emptyset$ e assim por diante.

Barwise e Copper (1981: 160), defendem que a abordagem apresentada acima para os quantificadores generalizados pode dar conta de um conjunto amplo de determinadores que ocorrem em sentenças da linguagem natural incluindo os determinadores das sentenças da lista abaixo:

- 1) (a) Existe apenas um número finito de estrelas.
(b) Nenhum coração irá bater um número infinito de vezes.
- 2) (a) Mais da metade das flechas de John acertam o alvo.
(b) Mais da metade das pessoas votaram em Carter.

⁹Adotei aqui a notação expressa em artigo de Feitosa, Grácio e Nascimento (s/n) disponível *online* em: [ftp://ftp.cle.unicamp.br/pub/Thematic-Consrel-FAPESP/Report-04-2009/\[FGN08\].pdf](ftp://ftp.cle.unicamp.br/pub/Thematic-Consrel-FAPESP/Report-04-2009/[FGN08].pdf). Último acesso datado de: 01/05/2018.

- 3) (a) A maioria das flechas de John acertou o alvo.
 (b) A maioria das pessoas votou em Carter.

Muito embora, nenhuma das seis sentenças acima pode ser estritamente expressa pelos quantificadores da LPPO. Repare que a formalização da sentença (1. (a)) com base em quantificadores generalizados permite abrir uma nova abordagem de descrições definidas, que constituem um importante tópico para a filosofia da linguagem. Descrições definidas são expressões da forma, “o x tal que ϕx ”, ou seja, o único objeto x que é um ϕ .¹⁰

Os resultados apresentados por Montague, Barwise e Cooper despertaram o interesse de lógicos e linguistas e abriram espaço para uma vasta gama de discussão sobre as relações entre linguagens naturais e formais para além da teoria clássica de quantificadores do cálculo de predicados. Além disso, a semântica adotada acima teria a vantagem de endossar a interpretação *standard* onde conjuntos podem ser entendidos como extensões dos predicados que serão quantificados. De acordo com Barwise, os quantificadores da LPPO são limitados para lidar com sentenças quantificadas da linguagem natural em pelo menos dois aspectos:

1. Em linguagens naturais ocorrem sentenças quantificadas que não podem ser expressas através dos quantificadores \forall e \exists . Desse modo, a semântica das linguagens naturais não pode ser inteiramente fundada no cálculo clássico de predicados.
2. A sintaxe das sentenças quantificadas nas linguagens naturais difere em grande medida da estrutura sintática das sentenças quantificadas da LPPO.

Nesse sentido, eles pensavam que o debate sobre a quantificação generalizada traria a clara vantagem de superar as limitações expostas em 1 e 2.

Uma importante contribuição para o estudo dos quantificadores generalizados foi dado pelo estabelecimento das chamadas *lógicas moduladas*. Em verdade, tais lógicas são constituídas por uma família de

¹⁰ O comportamento de descrições definidas e seu carácter quantificacional profundo foi o tema central do famoso artigo de Russell “On denoting”. Cf. Russell (1905).

sistemas formais monotônicos¹¹ que lidam com tipos específicos de quantificadores generalizados, a saber, quantificadores que ajudam a expressar formas particulares de argumentos indutivos, tratando-os dedutivamente, e que nos são dados por expressões específicas da linguagem natural. O trabalho das lógicas moduladas é realizado pela inclusão, na linguagem da lógica clássica de primeira ordem, de um quantificador generalizado Q , chamado de quantificador modulado. Portanto, uma lógica modulada funciona como uma extensão da lógica de primeira ordem. Esse novo quantificador deve ser interpretado como operando em um subconjunto Q do conjunto das partes do universo. Este subconjunto Q representa um conjunto arbitrário de proposições sustentadas por evidências dentro de uma base indutiva de conhecimento.

4 Alguns tópicos sobre quantificação

O estudo de quantificações suscitou e continua a suscitar um espectro de problemas que vai das mais técnicas questões sobre o papel dos quantificadores em sistemas formais até grandes problemas filosóficos, especialmente, de natureza metafísica e epistêmica. Esses problemas podem ser apresentados a partir de um conjunto de tópicos sobre a quantificação. No que segue, apresento uma lista desses tópicos que, embora não exaustiva, contém alguns dos mais importantes problemas sobre a quantificação lógica.

4.1 *Quantificação objetual vs. quantificação substitucional*

É comum em manuais de lógica e filosofia da lógica a apresentação de dois modos distintos de interpretar os quantificadores. Um deles é exatamente o modo como os entendemos até o presente momento neste artigo, a saber, associando cada quantificação a um domínio – entendido enquanto um conjunto de objetos – que a variável quantificada percorre. Essa abordagem é dita uma *interpretação objetual* dos quantificadores. Ela marca fortemente nossa semântica baseada em

¹¹ Em contextos computacionais, as aplicações dos quantificadores generalizados levaram a propostas de tratamento via lógicas não monotônicas. Para um exemplo dessa abordagem Cf. Reiter (1980).

modelos e pode ser esquematizada como segue:

“ $\forall x\varphi x$ ” equivale a “Para todo objeto x no domínio D , x é um φ ”.

e

“ $\exists x\varphi x$ ” equivale a “Para pelo menos um objeto x no domínio D , x é um φ ”.

Um modo alternativo de interpretar nossas quantificações possui um caráter fortemente linguístico e apela, não aos valores das variáveis estabelecidos como itens pertencentes a um domínio, mas a classes de substituições. Esse modo alternativo é conhecido como interpretação substitucional dos quantificadores e pode ser apresentada do seguinte modo:¹²

“ $\forall x\varphi x$ ” equivale a “Todas as instâncias substitutivas de φx são verdadeiras”,

ao passo que,

“ $\exists x\varphi x$ ” equivale a “Pelo menos uma instância substitutiva de φx é verdadeira”.

O que chamo de uma “instância substitutiva” no presente contexto é nada mais que uma expressão linguística que, ocupando a posição da variável na fórmula aberta “ x é um φ ”, produz uma sentença verdadeira. Em LPPO, as instâncias substitutivas são constantes individuais.

Muitas questões podem ser levantadas sobre como devemos entender os modos objetual e substitucional de interpretar os quantificadores: são tais modos complementares ou rivais? Caso sejam rivais, qual deles devemos assumir como filosoficamente satisfatório e logicamente adequado? Os lógicos e os filósofos não possuem respostas consensuais a essas perguntas, mas eles certamente concordam que, dependendo da interpretação dos quantificadores que é assumida, seguem-se diferentes consequências filosóficas. Há muito debate sobre quais seriam tais consequências. Por exemplo, as interpretações objetual e substitucional implicam em diferentes teorias

¹² Para um estudo introdutório sobre como a interpretação substitucional é aplicada em diversas áreas da filosofia tais como a metafísica, filosofia da matemática e filosofia da linguagem cf. Hand (2007).

da verdade ou elas são compatíveis com uma mesma concepção de verdade? A interpretação objetual para a lógica de predicados de segunda ordem¹³ nos compromete inevitavelmente com um realismo de propriedades como valores semânticos dos nossos predicados? A interpretação substitucional para a lógica de segunda ordem é capaz de evitar tal compromisso com propriedades? Em realidade, parece bastante razoável afirmar que a decisão entre assumir uma ou outra interpretação está quase sempre associada às consequências que cada lógico e filósofo estão dispostos a admitir ou mesmo desejam obtê-las. Quine¹⁴ e Davidson (1977), por exemplo, defenderam claramente a interpretação objetual. Por outro lado, Marcus (1961; 1972) sustenta uma interpretação do tipo substitucional. Há ainda aqueles filósofos, a exemplo de Linsky (1972) e Kripke (1976), que sustentam ambas as interpretações porque as entendiam como complementares.

Dada a autoridade que a semântica conjuntista, consolidada pelos trabalhos de Tarski em teoria dos modelos, proporcionou à lógica de predicados, parece justificado afirmar que a interpretação objetual dos quantificadores é considerada padrão, sendo a interpretação substitucional uma alternativa comumente apresentada por aqueles que, por uma razão ou outra, possuem desconfortos com relação às consequências e/ou limitações da semântica tarskiana.

4.2 Uma abordagem quantificacional para a existência.

Em meio a grande quantidade de filosofia que envolve a lógica de predicados, há uma abordagem da noção de existência que associa fortemente tal noção aos quantificadores; em especial, ao quantificador existencial.

¹³ A lógica de predicados de segunda ordem (LPSO) difere da LPPO por permitir quantificações não só sobre objetos, mas também sobre propriedades e relações. Por exemplo, o princípio do terceiro excluído pode ser formalizado em LPSO da seguinte maneira: $\forall x \forall \varphi (\varphi x \vee \neg \varphi x)$. Aqui, φ opera como uma variável para propriedades. A formalização como um todo afirma que o terceiro excluído vale para seja qual for o objeto e propriedade; valores semânticos, respectivamente, das constantes individuais e predicados da linguagem em questão.

¹⁴ Quine oferece um tratamento objetual dos quantificadores nas partes II e III do seu *Methods of Logic* (Quine 1950) e também em (Quine 1972). Em Quine, a defesa da interpretação objetual está em estreita relação com sua rejeição à lógica de predicados de segunda ordem.

Essa abordagem foi defendida, cada um a seu modo, tanto por Frege (1884; 1892) quanto por Russell (1905). Frege entendia afirmações de existência como predicacões de ordem superior que invariavelmente eram expressas em termos de sentenças quantificadas. De acordo com Frege, o predicado de existência expressa um conceito de ordem superior e afirma sobre um dado predicado – ou conceito – C de ordem inferior que a extensão de C é não vazia. Consequentemente, uma afirmação de não existência envolveria também uma predicacão de ordem superior a respeito de um predicado C de ordem inferior, informando que C possui uma extensão vazia. Em outras palavras, sentenças como

(1) Cavalos existem $[\exists x Cx]$

e

(2) Unicórnios não existem $[\neg \exists x Ux]$

incluiriam, ambas, predicacões de ordem superior que afirmam, respectivamente, que a extensão do conceito de *cavalo* possui pelo menos um membro e que a extensão do conceito de *unicórnio* não possui membro algum. Em termos fregeanos, essa relação entre existência e extensões contém atribuições numéricas implícitas, a saber, afirmações existenciais são negações do número zero, ao passo que negações existenciais são afirmações do número zero sempre com relação à cardinalidade da extensão de um dado conceito (Frege 1884: §53). Podemos dizer assim que zero não é o número atribuído ao conceito cavalo, mas é o número atribuído ao conceito *unicórnio*.

Uma consequência direta da compreensão fregeana do quantificador existencial como um predicado de ordem superior é que sentenças existenciais com a ocorrência de nomes próprios, tais como “Júlio César existe” e “Sherlock Holmes não existe” não são sintaticamente bem formadas, uma vez que elas atribuem existência diretamente a um objeto e não a um conceito. Em verdade, elas seriam pseudosentenças. Consequentemente, elas são consideradas por Frege (1892) como destituídas de valor de verdade.

Russell também associava formalmente a noção de existência à semântica dos quantificadores, mas não tratou a questão à maneira de Frege, fazendo apelo ao cair de um conceito sob outro de ordem superior. Para Russell, uma afirmação de existência formalizada por

intermédio do quantificador existencial carrega uma informação sobre funções proposicionais, ou seja, sobre uma expressão do tipo “ x é um φ ” ou, simplesmente, φx . Nesse sentido, afirmar (1) é afirmar que a função proposicional “ x é um cavalo” é verdadeira para pelo menos um valor de x , ao passo que a função “ x é um unicórnio”, envolvida em (2), é falsa para todos os valores de x .

A análise que Russell propõe em favor de funções proposicionais está na base da chamada *teoria das descrições definidas*. Nela, Russell apresenta um mecanismo de análise formal de sentenças com a ocorrência de descrições definidas – expressões do tipo “o x tal que Fx ” – reduzindo-as a sentenças onde tais descrições não ocorrem. Tomando emprestado o famoso exemplo de Russell,

(D) O atual rei da França é careca.

A sentença (D), do ponto de vista da gramática superficial, é uma sentença do tipo sujeito-predicado contendo “o atual rei da França” como uma expressão denotativa – mais precisamente, uma descrição definida – na posição de sujeito. No entanto, Russell chama atenção para o fato de que, de um ponto de vista lógico, (D) se revela um complexo de três afirmações envolvendo funções proposicionais, a saber, “existe pelo menos um atual rei da França \wedge não existe mais do que um atual rei da França \wedge todos atuais reis da França são carecas”. Portanto, (D) deve ser analisada em termos da satisfação ou não de um complexo de funções proposicionais e formalizada nos seguintes termos

(D)* $\exists x(Rx \wedge \forall y(Ry \rightarrow x = y) \wedge Cx)$

Nesse sentido, (D)* afirma que as funções proposicionais “ x é atual rei da França” e “ x é careca” são simultaneamente satisfeitas para exatamente um único valor de x ; o que é claramente falso. Ao revelar a estrutura lógica profunda de sentenças como (D), Russell mostra que expressões que têm um papel denotativo nas linguagens naturais, tal como ocorre com as descrições definidas, podem ser eliminadas na formalização das sentenças em que elas ocorrem em favor de funções proposicionais. Nesse processo, os quantificadores atuam para afirmar se tais funções possuem ou não valores que as satisfaçam e expressar, de algum modo, a quantidade de valores que a função admite relativo a um domínio. Como veremos posteriormente, esse

mecanismo que transfere o peso existencial para os quantificadores e não para os possíveis referentes das expressões denotativas inspirou fortemente os critérios de compromisso ontológico propostos por Quine.

4.3 *Compromisso ontológico e quantificação*

É bastante famosa a caracterização da ontologia feita por Quine (1953: 1) como sendo uma pesquisa guiada pela questão fundamental “O que há?”. Não obstante, nos termos estabelecidos por Quine, o tópico do compromisso ontológico não constitui um debate sobre o que em última instância há, ou ainda, sobre o que de fato compõe o que chamamos de realidade. A discussão sobre compromisso ontológico é sutilmente diferente. Ela versa sobre o que diferentes teorias dizem que há. Portanto, podemos seguir van Inwagen (2001: 13) e, corretamente, falar do compromisso ontológico como um tópico de *metaontologia* ou *metametafísica*. As questões que perpassam esse tópico são: como estabelecer os critérios que determinam os compromissos ontológicos de uma dada teoria? Ou ainda, como estabelecer o que uma teoria diz que há? Diferentes teorias descrevem a realidade como composta de itens distintos e muitas vezes incompatíveis entre si. Algumas teorias afirmam a existência de entidades abstratas, enquanto outras restringem o mundo a um agregado de entidades concretas. Determinadas teorias sustentam inúmeros mundos possíveis como existindo efetivamente tal qual o nosso mundo atual, enquanto outras afirmam existir apenas o nosso mundo atual, tratando os demais mundos possíveis em termos contrafactuais, ou seja, meros modos como o mundo atual poderia ter sido. Quais seriam os critérios para determinar em cada caso os compromissos ontológicos de uma teoria? Quine propôs respostas a essas questões que conectam fortemente o tópico do compromisso ontológico à pesquisa sobre quantificações.

Quine cunhou o *slogan* exaustivamente reproduzido que afirma que “ser é ser o valor de uma variável”. Esse slogan sintetiza o que ele pensava ser o critério básico que determina os compromissos ontológicos de toda e qualquer teoria, mas suas tentativas de explicitá-lo resultaram em diferentes enunciados, muitas vezes não completamente equivalentes. Vejamos alguns exemplos:

[...] entidades de um dado tipo são admitidas por uma teoria se, e somente se, algumas delas tiverem de ser incluídas entre os valores das variáveis para que os enunciados afirmados na teoria sejam verdadeiros.¹⁵

Dizer que uma dada quantificação existencial pressupõe objetos de um dado tipo é dizer simplesmente que a sentença aberta depois do quantificador é verdadeira acerca de alguns objetos desse tipo e de nenhum objeto que não seja desse tipo.¹⁶

Podemos dizer que consideramos tal e tal entidade se e somente se considerarmos o alcance de nossas variáveis como incluindo tal entidade: ser é ser um valor de uma variável.¹⁷

O que essas passagens têm em comum é a ideia de que o critério de compromisso ontológico proposto por Quine opera sobre teorias formalizadas e se concentra nas variáveis de sentenças quantificadas. Suponha que a sentença $\exists xFx$ é parte explicitamente integrante de uma dada teoria T , ou ainda, que T a pressuponha ou a implique. Nesse caso, é lícito afirmar que T assume o compromisso ontológico com entidades do tipo F na medida em que T só é verdadeira se seu domínio comportar pelo menos um objeto que seja o valor da variável na fórmula aberta Fx . Em outras palavras, uma teoria T só se compromete com objetos de um tipo F quando objetos deste tipo precisam figurar no domínio que o quantificador percorre de modo a tornar as sentenças quantificadas de T verdadeiras.

O critério de compromisso ontológico proposto por Quine é certamente herdeiro da *teoria das descrições definidas* de Russell e da *interpretação*

15 Traduzido do original: “[...] entities of a given sort are assumed by a theory if and only if some of them must be counted among the values of the variables in order that the statements affirmed in the theory be true” (Quine 1953: 103).

16 Traduzido do original: “For to say that a given existential quantification presupposes objects of a given kind is to say simply that the open sentences which follows the quantifier is true of some objects of that kind and none not of that kind” (Quine 1953: 131).

17 Traduzido do original: “We may be said to countenance such and such an entity if and only if we regard the range of our variables as including such an entity: To be is to be a value of a variable” (Quine, 1966: 199).

objetual dos quantificadores e está intimamente ligado à *rejeição quineana à lógica de predicados de segunda ordem*. Ao assumir as posições mencionadas acima, Quine endossa a redução de nomes próprios a descrições definidas — a conhecida tese descritivista dos nomes próprios — e uma consequente redução de descrições definidas¹⁸ a funções proposicionais envolvendo variáveis quantificadas. Caso seja satisfatória, essa redução visa mostrar que o compromisso ontológico não reside nos termos singulares de uma teoria formalizada, mas em suas variáveis quantificadas. Dada uma sentença com ocorrência de um nome próprio tal como:

(3) Sócrates é filósofo.

Quine assume que, em (3), o termo singular “Sócrates” pode ser substituído por um predicado artificial do tipo “socratiza” e expresso satisfatoriamente em uma descrição definida como “o x que socratiza”. Por intermédio da teoria das descrições definidas, (3) pode ser parafraseada em

(3)* Há um x que socratiza, o que quer que socratize é idêntico a x e x é filósofo.

Em lógica de predicados temos:

(3)** $\exists x(x \text{ socratiza} \wedge \forall y(y \text{ socratiza} \rightarrow y = x) \wedge x \text{ é filósofo})$

Com isso, a sentença (3), onde supostamente o compromisso ontológico estava associado à ocorrência do termo singular “Sócrates”, ao ter sua estrutura lógica revelada em (3)**, produz uma sentença composta inteiramente de funções proposicionais com a ocorrência de variáveis quantificadas. Quine conclui com isso que o compromisso ontológico está não nos termos singulares, mas nas variáveis quantificadas.

Ademais, a distinção anteriormente apresentada entre uma interpretação objetual e outra substitucional resulta em consequências ontológicas interessantes para a análise de teorias formalizadas. Ao fazer apelo claro a um domínio de objetos sobre os quais as variáveis das sentenças formalizadas variam, a interpretação objetual oferece um

¹⁸ Há controvérsias sobre aceitação de Quine da redução de nomes próprios a descrições definidas. Um exemplo é Kripke (1980: 29, n. 5). No entanto, não entrarei nessa discussão ao longo do presente trabalho.

dispositivo prático e direto de checagem de compromisso ontológico. Foi precisamente essa característica que auxiliou Quine na formulação de seu critério de compromisso ontológico sob uma leitura extensional dos quantificadores. Por outro lado, a interpretação substitucional, por fazer uso de classes de substituição e instâncias verdadeiras de sentenças quantificadas, oferece um procedimento indireto de checagem de compromisso ontológico de uma teoria. A razão é que, se a interpretação objetual faz menção direta aos objetos que a sentença quantificada afirma existir, do ponto de vista da interpretação substitucional, para checar o compromisso que uma quantificação implica, precisamos primeiro verificar as condições de verdade das suas instâncias substitutivas. Por exemplo, para checar o comprometimento da sentença $\exists xFx$ de uma teoria T , precisamos primeiro verificar as condições de verdade de pelo menos uma de suas instâncias substitutivas verdadeiras. Suponha que seja ela a sentença Fa . Nesse caso, a instância substitutiva Fa é verdadeira se, e somente se, “ a ” for um termo que denote um determinado objeto e esse objeto for um F . Somente dessa forma indireta expressamos o compromisso ontológico da sentença $\exists xFx$. Muitas objeções são levantadas contra os critérios de compromisso ontológico de Quine, bem como contra toda a filosofia que tais critérios pressupõem.¹⁹ Não é meu objetivo no presente artigo avaliar tais objeções, mas apenas mostrar de que modo o tópico da quantificação está conectado com importantes questões de ontologia e demais áreas da filosofia.

4.4 *Quantificação irrestrita e generalidade absoluta*

Seja em nosso discurso cotidiano, seja em nosso discurso científico e filosófico, estamos rotineiramente realizando afirmações gerais, ou ainda, afirmações sobre totalidades. Exemplos são:

(4) Todas as mesas estão ocupadas

e

¹⁹ Importantes críticas aos critérios de Quine e à teoria das descrições podem ser encontradas em Alston (1958) e Strawson (1961). Para uma discussão mais ampla sobre os critérios de compromisso ontológico recomendo fortemente a leitura do artigo “Compromisso Ontológico” de Daniel Durante publicado neste *Compêndio em Linha de Problemas de Filosofia Analítica*.

(5) Tudo é auto-idêntico

Ambas as sentenças expressam atribuições de propriedades a itens de determinadas totalidades. Não obstante, nem toda afirmação sobre totalidades é de um mesmo tipo. Nossas afirmações gerais podem ser diferenciadas quanto ao seu pretenso alcance: elas podem ser afirmações sobre totalidade *restritas* ou *irrestritas*. Por um lado, (4), quando proferida por um garçom na entrada de um restaurante específico, expressa a informação que tudo aquilo que é mesa do restaurante em questão possui a propriedade de estar ocupada. No entanto, a restrição do domínio ao qual o quantificador percorre é contextual e pragmática. Ela está implícita na sentença. Somente o contexto de proferimento revela a restrição. Desse modo, (4) afirma algo sobre uma totalidade restrita, a saber, a totalidade de mesas do restaurante em questão. Quem a profere não pretende afirmar nada sobre as mesas dos restaurantes do país vizinho, sobre as mesas da biblioteca municipal ou sobre a mesa que meu computador ocupa no momento em que escrevo o presente texto. É transparente que há muitos itens que escapam a pretensão de abrangência, ou de alcance, do que é afirmado em (4). Por outro lado, (5), que expressa o princípio lógico-metafísico da auto-identidade, pretende ter o alcance mais universal possível. Caso verdadeira, o que (5) afirma não é satisfeito apenas por mesas, metais, ácidos, átomos, governos ou pessoas, mas por *absolutamente tudo* o que há.

O grau de generalidade do discurso marca o alcance de uma sentença que diz respeito a uma totalidade. Se a afirmação é sobre uma totalidade com restrições, dizemos que ela é sobre uma *generalidade relativa*, ou seja, ela está associada a um domínio restrito de objetos. É assim que ocorre em (4) que está associada ao domínio restrito das mesas de um determinado restaurante. De modo contrário, se a afirmação diz respeito a uma totalidade sem restrições, dizemos que ela é sobre uma *generalidade absoluta*; assim como ocorre em (5) e sua pretensão de afirmar algo sobre a totalidade absoluta do que existe.

Em lógica formal, a função básica operada pelo quantificador universal da LPPO é precisamente a de fazer afirmações gerais. Desse modo, é correto dizer que o discurso que faça uso do quantificador universal possui um alcance geral, ou ainda, que ele diz respeito a generalidades. Assumindo a semântica padrão para quantificadores

descrita na primeira parte deste artigo, dizemos que uma quantificação universal é restrita quando o domínio associado ao quantificador não é absolutamente inclusivo, ou seja, quando seu complemento não é vazio. Nesse caso, há pelo menos um objeto que não pertence ao domínio da quantificação. Portanto, o domínio de uma quantificação restrita consiste em uma generalidade relativa. De modo análogo, uma quantificação universal é dita irrestrita caso o domínio associado ao quantificador seja absolutamente inclusivo, ou seja, quando seu complemento for vazio. Nesse caso, nenhum objeto está fora do domínio percorrido pelas variáveis quantificadas e, portanto, esse domínio consiste em uma generalidade absoluta.

Assumindo as seguintes formalizações para as sentenças (4) e (5) acima:

$$(4)^* \forall x(Mx \rightarrow Ox)$$

e

$$(5)^* \forall x(x = x)$$

(4)* é uma quantificação restrita, ao passo que (5)* é uma quantificação irrestrita. Embora, do ponto de vista semântico e sintático, as duas quantificações pareçam indistinguíveis, em (4)* o quantificador sofre uma restrição pragmática. A propósito, na notação da lógica clássica de predicados nenhuma restrição de quantificador é acompanhada sintaticamente por um símbolo notacional, mas por aspectos extra-sintáticos.

Há outros modos de restringir uma quantificação além da pragmática. Por exemplo, quando físicos e químicos afirmam que “todo metal dilata quando aquecido”, eles fazem uma afirmação cujo quantificador sofre uma *restrição sortal*. Ela não é uma afirmação sobre ácidos, átomos, governos ou pessoas, mas sobre uma totalidade de um tipo específico. Alguém pode questionar que tal afirmação sobre metais possui também uma leitura irrestrita, na medida em que é possível entender a sentença como afirmando que “para absolutamente tudo o que há segue-se que, se algo for um metal, então esse algo dilata quando aquecido”. Mas penso que essa tradução parece divergir, em algum aspecto relevante, das intenções comunicativas da maioria dos falantes competentes do português quando afirmam que “todo metal dilata quando aquecido”. Quem afirma isso está mais

claramente comprometido com o discurso sobre uma totalidade de um *tipo* específico do que pretendendo afirmar algo sobre um domínio absoluto. Ela é, em primeiro lugar, uma afirmação sobre o comportamento de um fragmento do mundo natural – portanto, uma sentença das ciências naturais – e não uma afirmação metafísica.²⁰ Do ponto de vista lógico, a leitura irrestrita de “todo metal dilata quando aquecido” possui uma inspiração eminentemente sintática, na medida em que ela é orientada pelo modo como o conectivo de implicação opera combinado ao quantificador universal. Em contrapartida, a restrição do quantificador desta sentença é dada não sintaticamente, mas por meio de um mecanismo que chamamos de restrição sortal. Através dele, não pretendemos falar sobre absolutamente tudo, mas sobre uma totalidade de um *tipo* específico.

Além das restrições sortais e sintáticas, há ainda restrições pragmáticas, dentre outras. Não pretendo aqui realizar uma discussão sobre mecanismos de restrição de quantificadores. Devo me concentrar exclusivamente na questão da legitimidade da quantificação irrestrita. Dado o fato de que quantificações restritas estão amplamente disseminadas no uso da linguagem natural, poucos são os teóricos que questionam seriamente sua legitimidade. O grande desafio associado ao tópico da quantificação restrita é o de oferecer uma teoria geral de restrição de quantificadores que seja capaz de determinar, em cada sentença quantificada, qual o mecanismo que está sendo usado para restringir o domínio percorrido pelas variáveis quantificadas. O mesmo não pode ser dito a respeito das quantificações irrestritas. Afirmações que se pretendem absolutamente gerais são constantemente

20 Contrariamente ao que estou afirmando, Kripke (1980) e Putnam (1981; 1990) pensam que determinadas afirmações das ciências naturais que revelam propriedades essenciais de *espécies* e *tipos naturais* são também afirmações metafísicas, uma vez que elas revelam propriedades que espécies e tipos naturais não podem deixar de satisfazer mantendo simultaneamente sua identidade e existência. Nesse caso, por exemplo, se assumimos que *dilatar quando aquecido* é uma propriedade essencial de metais derivada de suas, igualmente essenciais, propriedades atômicas, então a sentença “todo metal dilata quando aquecido” seria, em certo aspecto, uma sentença metafísica. Embora seja essa uma discussão importante e que está no núcleo duro do debate sobre *essencialismo*, não discutirei essas questões no presente texto. Estou assumindo aqui, para efeito de interpretação da sentença acima, meramente aspectos comunicativos cotidianos e, portanto, um contexto onde os falantes quase sempre ignoram as teorias filosóficas que rodeiam tais afirmações.

alvos de argumentos contra sua legitimidade.²¹

Mas, de onde são extraídos os principais argumentos contra a quantificação irrestrita? A resposta mais direta a essa pergunta é: Da própria semântica *standard* dos quantificadores.

É fato notório que a semântica padrão modelo-teorética (*model-theoretic*), mediante sua concepção de satisfação em um modelo e atribuição de valores a variáveis, foi fortemente erguida sobre o alicerce da teoria axiomática dos conjuntos desenvolvida por Zermelo-Fraenkel; doravante ZFC.²² Como foi exposto acima, isso fica claro de diversos modos: na noção de domínio enquanto conjunto; na maneira como estabelecemos as funções interpretativas para predicados de múltiplas aridades a partir de n -úplas ordenadas selecionadas com base no domínio assumido; dentre outros. No entanto, uma vez que em ZFC há sérios obstáculos que inviabilizam a existência de um conjunto universo absoluto, uma semântica para quantificadores fundada em ZFC possui, conseqüentemente, a incapacidade de oferecer modelos para quantificações universais pretensamente irrestritas. Assumindo sempre o contexto da semântica fundada na teoria dos conjuntos ZFC, essa afirmação pode ainda ser desdobrada em um conjunto de outras afirmações que revelam a importância do tópico da quantificação irrestrita. Uma pequena amostra é dada a seguir: (a) Não há um modelo oníabrangente; (b) há interpretações informais, intuitivas, para a linguagem da lógica quantificacional às quais nenhum modelo corresponde; (c) não podemos dominar satisfatoriamente as noções de *verdade em todo domínio* ou *verdade em todos os modelos* por intermédio da semântica estabelecida em ZFC.

Antes de apresentar os argumentos lógicos contra quantificações irrestrita, vale uma vez mais ressaltar a relação entre domínios de quantificações e conjuntos. Essa relação é tão fundamental para a

21 Na lógica formal contemporânea, os primeiros trabalhos dedicados ao tópico da quantificação irrestrita foram os publicados por Mostowski (1957) e Lindström (1966). Seus trabalhos foram fortemente orientados por uma tentativa de generalizar a concepção e abrangência dos quantificadores descritos na lógica fregeana. Para uma análise de resultados mais recentes, a coletânea de Rayo & Uzquiano (2006) oferece uma excelente fonte de pesquisa sobre argumentos favoráveis e contrários à quantificação irrestrita.

22 O “C” de “ZFC” deve-se a inclusão do axioma da escolha (*axiom of choice*) ao sistema estabelecido por Zermelo-Fraenkel.

semântica tarskiana que Cartwright (1994: 7) a apresentou em termos do que ele chamou de *Princípio Tudo-em-Um* (All-in-One Principle) e que pode ser formulado da seguinte maneira:

Ao quantificar sobre determinados itens assumimos que a totalidade dos itens em questão compõe um conjunto. Em outras palavras, todo domínio de discurso determina um conjunto composto pelos objetos pressupostos pelo discurso em questão.

O princípio proposto por Cartwright sintetiza dois aspectos básicos da semântica padrão para a lógica de predicados, a saber, que a toda quantificação associamos um domínio que nada mais é que um conjunto e que esse conjunto deve ser entendido enquanto um objeto abstrato. Tendo isso em mente, fica fácil perceber que, se uma quantificação é irrestrita, então a ela está associado, em princípio, um conjunto absolutamente universal. No entanto, alguns resultados relevantes obtidos internamente a ZFC – e que explanarei adiante – estabeleceram a inexistência de tal conjunto. Se esses resultados são de fato decisivos, como alegam os oponentes da quantificação irrestrita, então segue-se que não possuímos modelos para tais quantificações dentro da nossa semântica padrão de orientação tarskiana.

Os argumentos de caráter lógico contra as quantificações irrestritas podem ser condensados em dois resultados fundamentais obtidos dentro da teoria dos conjuntos, a saber, o *Paradoxo de Russell* e o *Teorema de Cantor*.

4.4.1 O Paradoxo de Russell

A teoria dos conjuntos de Cantor, em sua versão originária, desenvolvida anteriormente às descobertas dos paradoxos que envolvem a noção de conjunto, endossava como basilar um princípio que associava a cada propriedade ou condição – também chamada de intensão – uma extensão que deveria ser entendida enquanto o conjunto dos itens que têm a propriedade em questão. Esse é o chamado *princípio da compreensão*:

$$\forall \varphi \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \varphi x)$$

onde φ é uma variável para propriedades. Além disso, x é uma variável para objetos e y é o conjunto que figura como a extensão de

um predicado φ em questão. Desse modo, a relação propriedade/predicado – a intensão – e sua extensão pode ser assim estabelecida de maneira esquemática:

$$\varphi(x) \mapsto y = \{x \mid \varphi(x)\}$$

É fácil perceber o apelo intuitivo do princípio da compreensão. De fato, se pensarmos em uma propriedade ou condição, somos facilmente levados a pensar na totalidade das coisas que têm a propriedade ou condição em questão. Por exemplo, podemos falar, tanto da propriedade ser *filósofo* (a intensão), como do conjunto F das pessoas que têm tal propriedade (a extensão), ou seja, o conjunto dos filósofos. Do mesmo modo, podemos falar do complemento deste conjunto, ou seja, o conjunto de todas as coisas que não são filósofos.

Russell mostrou que o princípio da compreensão não possui um caráter lógico, não apenas porque ele falha em ser universalmente válido, mas, de maneira mais dramática, porque ele conduz a teoria dos conjuntos que o comporta a uma contradição. Para tal, ele provou que há predicados sintaticamente bem formados dentro da linguagem da teoria dos conjuntos que não estão associados a uma extensão ou, dito de outro modo, cuja extensão é contraditória. Mas como isso foi possível? Engenhosamente, Russell percebeu que não havia na teoria ingênua dos conjuntos regras suficientes que restringissem nosso modo de construir conjuntos. Lembrando que a teoria erguida por Cantor permite falar tanto de conjuntos cujos membros não são, eles mesmos, conjuntos, tal como o conjunto F acima cujos membros são pessoas, quanto de conjuntos cujos membros são também conjuntos. Pense no conjunto T de conjuntos com mais de três elementos. É fácil perceber que $F \in T$, uma vez que há mais de três filósofos e, portanto, F possui mais de três elementos. Do mesmo modo, curiosamente, parece, em princípio, legítimo afirmar que $T \in T$, uma vez que há certamente mais de três conjuntos com mais de três elementos. Em outras palavras, tendo T mais de três elementos, T tem a propriedade ou condição que determina se um elemento é ou não membro de T .

O *insight* de Russell foi mostrar que, se é legítimo falar de um conjunto como pertencendo a si mesmo – e a teoria ingênua não impõe restrições quanto a isso –, é igualmente legítimo falar de conjuntos que não pertencem a si mesmos. O conjunto F é um exemplo. O

conjunto F não é ele próprio um filósofo e, assim, $F \notin F$. Assuma, portanto, a propriedade ou condição $x \notin x$, ou seja, a propriedade de não pertencer a si mesmo. Pelo princípio da compreensão, a ela deve estar associada uma extensão R que nada mais é que um conjunto entendido nos seguintes termos:

$$x \notin x \mapsto R = \{x \mid x \notin x\}$$

Podemos também apresentar a mesma ideia de forma mais clara como uma instância do princípio da compreensão:

$$\forall x(x \in R \leftrightarrow x \notin x)$$

Não obstante, uma vez que a validade do princípio da compreensão é supostamente universal, ele deve ser aplicável ao próprio conjunto R . Em outras palavras, podemos nos perguntar se R pertence ou não a si mesmo. Isso leva o raciocínio diretamente a um resultado contraditório, a saber,

$$R \in R \leftrightarrow R \notin R$$

Desse modo, o resultado de Russell põe um obstáculo ao princípio da compreensão ao revelar uma propriedade, nomeadamente, $x \notin x$, que não possui uma extensão, ou conjunto, correspondente. Pois, o suposto conjunto R que figuraria como a extensão da propriedade em questão conduz o sistema a uma contradição. Em resumo, R é um objeto inconsistente. Nesse contexto, o paradoxo de Russell figura como uma prova por redução ao absurdo da inexistência de um tal conjunto R . Além disso, ao mostrar que não há o conjunto R , uma vez que o suposto conjunto comporta uma contradição e, conseqüentemente, que também não há uma extensão para o predicado/propriedade *conjunto que não pertence a si mesmo*, Russell provou que o princípio da compreensão leva a teoria dos conjuntos à inconsistência e que, portanto, devemos estabelecer restrições aos nossos mecanismos de manipulação de conjuntos. Isso, obviamente, inclui deslegitimar propriedades ou condições tais como “ $x \in x$ ” e “ $x \notin x$ ”.

A esse ponto, o leitor pode perceber que me desviei consideravelmente de meu percurso inicial na trilha do debate sobre a quantificação. Tal desvio não foi sem motivos. Em posse do paradoxo de Russell, podemos nos perguntar agora o que, neste resultado, afeta a quantificação irrestrita. Como vimos acima, nos termos da semântica de orientação tarskiana,

a quantificação irrestrita pressupõe a existência de um conjunto U absolutamente universal. No entanto, caso existisse um conjunto nos termos de U , ele deveria incluir a si mesmo como elemento, pois, do contrário, ele não seria o conjunto de absolutamente tudo o que há. No entanto, as restrições estabelecidas pelo paradoxo de Russell excluem a possibilidade de um conjunto que contenha a si mesmo como elemento, eliminando assim a possibilidade de existência de um conjunto com as características de U .

Na tentativa de evitar paradoxos como o apresentado acima, Russell propôs o diagnóstico de que tais resultados indesejados são produtos do uso de definições impredicativas dentro de uma teoria, ou seja, definições que, no ato de apresentar uma determinada entidade, fazem apelo a uma totalidade dentro da qual a entidade definida já está contida. Portanto, definições impredicativas devem ser banidas.²³ No entanto, excluir definições impredicativas também inviabiliza o tratamento formal do discurso sobre uma generalidade absoluta, uma vez que o conjunto universo que expressa tal generalidade deve ser definido de um modo tal que a totalidade que ele representa deve conter a si mesma como elemento, do contrário, não seria uma generalidade absoluta.

4.4.2 O Teorema de Cantor

Além do resultado obtido por Russell, a própria *concepção iterativa* de conjunto, que constitui uma das bases de superação da teoria ingênua dos conjuntos de Cantor em favor de uma teoria axiomática, revela a não existência de um conjunto absolutamente universal. Tal concepção é marcada pela ideia de que há operações definidas internamente à teoria dos conjuntos que garantem que, dado qualquer conjunto S , há um conjunto com maior cardinalidade – maior quantidade de elementos – que a de S , gerando assim uma sequência infinita de conjuntos cada vez maiores em número de elementos; nunca havendo, portanto, um conjunto U absolutamente inclusivo. Uma das operações que podem verificar a concepção iterativa é a operação \wp de potência

²³ Poincaré (1906) também propôs um tratamento de paradoxos análogo ao de Russell, a saber, via eliminação de definições impredicativas. Para uma apresentação mais recente e completa sobre o tema da impredicatividade cf. Feferman (2005).

de um conjunto. Esse resultado é expresso no que ficou conhecido como o *Teorema de Cantor*. No que segue, apresento os traços gerais do teorema e uma reconstrução da prova com um importante apelo ao argumento diagonal popularizado por Cantor.

Em primeiro lugar, chamamos de conjunto potência²⁴ ao conjunto formado por todos os subconjuntos de um dado conjunto. É também usual falar do conjunto potência como o conjunto das partes de um conjunto. O que Cantor provou com seu famoso resultado é que todo conjunto ou coleção possui mais subconjuntos que membros, ou ainda, que não há uma correspondência biunívoca entre os membros de um conjunto S qualquer e os subconjuntos de S , pois o conjunto formado pelos subconjuntos de S possui uma cardinalidade maior que a de S . Sendo $\#$ o símbolo que expressa a cardinalidade de um conjunto e S um conjunto qualquer, temos que

$$\#\wp(S) > \#(S)$$

Por exemplo, o conjunto potência do conjunto $A=\{1, 2\}$ que possui 2 elementos é o conjunto $\wp(A)=\{\{1\}; \{2\}; \{1, 2\}; \emptyset\}$ composto por 4 elementos. A relação precisa entre a cardinalidade de um conjunto S e a cardinalidade de seu conjunto potência $\wp(S)$ é dada pela fórmula $c=2^n$ onde n é o número de elementos de S e c é o número de elementos de $\wp(S)$. Em outros termos, temos

$$\#\wp(S) = 2^{\#S}$$

De certo modo, o resultado de Cantor parece mesmo óbvio para conjuntos finitos, dado que todo conjunto $\wp(S)$ – o conjunto potência de um conjunto S qualquer –, sendo S finito, possui sempre entre seus membros, conjuntos unitários formados, cada um deles, por um elemento de S e mais o próprio conjunto S . Isso, por si só, já

24 De acordo com Belna (2011: 120-121), ao introduzir a noção de potência Cantor inspirou-se em um tratado de geometria projetiva famoso em sua época e publicado pelo matemático suíço Jacob Steiner. No tratado em questão, Steiner fazia uso da noção para expressar que duas figuras se relacionam uma com a outra por projeção, ou seja, que cada elemento de uma figura está associado a um, e somente um, elemento da outra figura. Desse modo, dizemos que duas figuras têm a mesma potência caso a projeção estabeleça uma bijeção. *Mutatis mutandis*, em teoria dos conjuntos esse mesmo princípio ajuda a definir a noção de biunivocidade, bem como as relações de *ter a mesma cardinalidade que* e *ter a mesma potência que*.

garantiria uma maior cardinalidade de $\wp(S)$. No entanto, Cantor foi além ao mostrar de maneira precisa e exaustiva a relação estabelecida entre os conjuntos e seus respectivos conjuntos potência. A prova de Cantor revela que tal relação ocorre também para conjuntos infinitos. Como pode ser observado a seguir, semelhantemente ao que ocorre na prova do paradoxo de Russell, a prova de Cantor possui a estrutura de uma *reductio*.²⁵

Teorema de Cantor: para todo conjunto S , $\wp(S)$ tem maior cardinalidade que S .

Prova: Seja S um conjunto qualquer e $\wp(S)$ seu conjunto potência. Suponhamos que haja uma função biunívoca $f: S \mapsto \wp(S)$ que associa a cada membro m de S um distinto subconjunto s de S sendo, portanto, s um membro de $\wp(S)$. Dadas essas condições, temos que $f(m)=s$. Nesse contexto, alguns membros m de S podem eventualmente ser também membros do subconjunto associado a ele pela função em questão. Por exemplo, dado um elemento $a \in S$ e seja $s=\{a\}$ e $m=a$, onde a está associado a s por intermédio da função f . Nesse caso $a \in s$. Caso essas condições não sejam satisfeitas, segue-se que $a \notin s$. Considere então o conjunto W constituído por todo membro de S que não é membro do subconjunto associado a ele pela função f . Obviamente, como W é ele próprio um subconjunto de S e, consequentemente, um membro de $\wp(S)$, segue-se da suposição inicial que W deve estar mapeado na função f . Com isso, deve haver um membro r de S tal que $f(r)=W$. A questão que se põe é: r pertence ou não a W ? Considere que $r \in W$. Uma vez que definimos W como o conjunto de todos os membros m de S que não pertencem ao subconjunto s tal que $f(m)=s$, então $r \notin W$. Do modo análogo, pode-se verificar que o inverso também ocorre: se $r \notin W$, então $r \in W$. Ou seja, $r \in W \leftrightarrow r \notin W$; o que é uma contradição. Como r é um membro arbitrário de S , o que a contradição mostra é que não há nenhum elemento de S que esteja associado ao subconjunto W de S . Portanto,

²⁵ As demonstrações apresentadas aqui para o teorema de Cantor nos casos de conjuntos finitos e infinitos são reconstruções das demonstrações apresentadas em Klement (2010: 17) com pequenas adaptações no aspecto notacional para o contexto do presente artigo.

negando a suposição inicial que levou à contradição, não há uma correspondência biunívoca entre os membros de um conjunto S e os subconjuntos de S . Para qualquer conjunto S , há mais subconjuntos de S que membros de S . Logo, para todo conjunto S , $\wp(S)$ tem maior cardinalidade que S . ■

Para aplicar o resultado acima ao caso dos conjuntos infinitos, a *reductio* de Cantor pode ser apresentada de maneira análoga ao *argumento diagonal* utilizado para provar que a cardinalidade dos números irracionais, e consequentemente a dos reais, é maior que a cardinalidade dos naturais. Vejamos como isso é possível:

	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	...
S_1	✓	✓		✓		
S_2			✓		✓	
S_3		✓	✓	✓		
S_4	✓					
S_5		✓			✓	
⋮	✓		✓	✓		↘

Tabela 1 – Argumento diagonal

Supondo que o conjunto S em questão seja infinito, a Tabela 1 acima apresenta a correlação entre os membros e os subconjuntos de S . As colunas $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, \dots$ apresentam a lista dos infinitos membros de S , ao passo que as linhas $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, \dots$ correspondem à lista dos subconjuntos de S . As marcas de checagem “✓” indicam quais membros m de S pertencem ao subconjunto s em questão. Por exemplo, o subconjunto S_1 é composto pelos membros m_1, m_2, m_4 de S , ou seja, $S_1 = \{m_1, m_2, m_4\}$. Podemos facilmente gerar o problemático subconjunto W de S através da diagonalização de Cantor selecionando apenas os membros m de S que não possuem marca de checagem onde a seta diagonal da tabela os intercepta. Dois exemplos são os membros m_2, m_4 . Dado que W é um subconjunto de S , ele próprio deve figurar como uma das linhas da Tabela 1 e, portanto, a seta diagonal deve interceptá-lo também quando passar por algum membro m_n . Nesse caso, dada as condições estabelecidas,

m_n possuirá marca de checagem apenas caso ele não a possua; o que é obviamente uma contradição. Com isso, embora W seja um subconjunto legítimo de S , ele não pode figurar na Tabela 1 que pretende estabelecer uma correspondência biunívoca entre os membros e os subconjuntos de S . Portanto, mesmo sendo S um conjunto infinito, o número de seus subconjuntos excede o número de seus membros.

4.4.3 Para além de uma semântica fundada em ZFC

Tanto o paradoxo de Russell quanto o teorema de Cantor contribuíram enormemente para a concepção iterativa de conjuntos. Essa concepção está ligada diretamente ao tópico da *extensibilidade indefinida*, ou seja, a ideia de uma extensão que pode ser sempre ampliada indefinidamente de modo a nunca ter um total. Russell percebeu que os resultados erguidos contra a teoria ingênua dos conjuntos inviabilizavam nosso discurso sobre uma generalidade absoluta nos termos dessa semântica estabelecida em ZFC. Nas palavras de Russell (1908: 225): “when I say that a collection has no total, I mean that statements about all its members are nonsense”. Seguindo essa mesma linha, numa carta a Dedekind datada de 1899, Cantor também reconhece a dificuldade ao diferenciar dois tipos básicos de totalidades, a saber, restrita e irrestrita, e alegar que totalidades irrestritas são ilegítimas, pois são totalidades inconsistentes.

Uma pluralidade (*Vielheit*) pode ser constituída de tal forma que a suposição de uma “união” (*Zusammensein*) de todos os seus membros leva a uma contradição, de modo que é impossível conceber essa pluralidade como uma unidade, um objeto completo (*fertig*). Tais pluralidades eu chamo *absolutamente infinitas* ou *inconsistentes*... Como é prontamente mostrado, a “totalidade (*Inbegriff*) de tudo que é pensável” é uma pluralidade [inconsistente]. E há outros exemplos também. Por outro lado, quando a totalidade (*Gesamtheit*) dos membros de uma pluralidade pode ser conjugada sem contradição, de modo que é possível que eles sejam considerados juntos como “uma única coisa”, então eu chamo isto de pluralidade consistente ou “conjunto” (*Menge*).²⁶

26 Traduzido a partir de: “A plurality (*Vielheit*) can be so constituted that the

Se partirmos da noção de uma multiplicidade definida (um sistema, uma totalidade) das coisas, é necessário, como descobri, distinguir dois tipos de multiplicidades (...) Pois uma multiplicidade pode ser tal que a suposição de que todos os seus elementos “estão juntos” leva a uma contradição, de modo que é impossível conceber tal multiplicidade como uma unidade, como “uma coisa acabada”. Eu chamo tais multiplicidades de multiplicidades absolutamente infinitas ou inconsistentes.

Como podemos ver, a “totalidade de tudo pensável”, por exemplo, é uma tal multiplicidade (...) Se, por outro lado, a totalidade dos elementos de uma multiplicidade pode ser pensada sem contradição como “estando juntos”, de modo que eles possam ser reunidos em “uma coisa”, eu a chamo de uma multiplicidade consistente ou um “conjunto”(...) Duas multiplicidades equivalentes ou são ambas “conjuntos” ou são ambas inconsistentes.²⁷

Obviamente, esse resultado é extremamente perturbador para quem

supposition of a “conjoining” (*Zusammensein*) of all its members leads to contradiction, so that it is impossible to conceive of this plurality as a unity, a complete (*fertig*) object. Such pluralities I call *absolutely infinite* or *inconsistent*... As is readily shown, the ‘totality (*Inbegriff*) of everything thinkable’ is such an [inconsistent] plurality. And there are further examples as well. On the other hand, when the totality (*Gesamtheit*) of the members of a plurality can be conjoined without contradiction, so that it is possible for them to be taken together as ‘one single thing’ then I call this a consistent plurality or ‘set’ (*Menge*)”, in Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Berlin: Springer, p. 443. Passagem citada e traduzida por Rescher e Grim (2008). Os grifos não fazem parte do texto original, tendo sido introduzidos com a finalidade de enfatizar determinados aspectos relevantes ao contexto.

27 Traduzido a partir de: “If we start from the notion of a definite multiplicity (a system, a totality) of things, it is necessary, as I discovered, to distinguish two kinds of multiplicities (...) For a multiplicity can be such that the assumption that all of its elements ‘are together’ leads to a contradiction, so that it is impossible to conceive of the multiplicity as a unity, as ‘one finished thing’. Such multiplicities I call *absolutely infinite* or *inconsistent multiplicities*. (...) As we can see, the ‘totality of everything thinkable’, for example, is such a multiplicity (...) If, on the other hand, the totality of the elements of a multiplicity can be thought of without contradiction as ‘being together’, so that they can be gathered together into ‘one thing’, I call it a *consistent multiplicity* or a ‘set’ (...) Two equivalent multiplicities are either both ‘sets’ or both are inconsistent”. (Cantor 1899: 114). Citado por Priest (2002: 122).

pretende formalizar teorias que dependem diretamente da legitimidade de quantificações irrestritas. Em filosofia, a formalização de uma teoria metafísica geral – nos termos propostos pelos gregos antigos²⁸ – é um exemplo paradigmático, dado que princípios metafísicos são definidos como princípios que são satisfeitos por absolutamente tudo. Se os críticos da quantificação irrestrita estão corretos – e os argumentos parecem muito fortes e favoráveis a eles –, não há espaço para afirmações absolutamente gerais em uma semântica baseada na teoria dos conjuntos ZFC. Portanto, a admissão de quantificações irrestritas nos leva à necessidade de uma semântica alternativa. Embora não seja meu objetivo no presente artigo realizar uma análise das alternativas à ZFC na busca de modelos para quantificações irrestritas, vale a pena destacar uma lista resumida das estratégias que guiam essas alternativas:

Estratégia I: Assumir uma teoria dos conjuntos alternativa que auxilie a construção de modelos para quantificações irrestritas, mas que se mantenha dentro dos quadros da lógica clássica. Nesse caso, os ajustes para comportar uma totalidade absolutamente universal seriam feitos introduzindo distinções de ordem conceitual e não de regras de inferências ou outros mecanismos sintáticos. Essa estratégia é comumente associada ao uso de uma teoria dos conjuntos como a NBG ou MK.²⁹ Tais teorias operam como extensões de ZFC e, portanto, estão igualmente fundadas na lógica clássica, mas introduzem uma distinção entre conjuntos e classes próprias. Os primeiros seriam agregados que satisfazem todas as operações que caracterizam a concepção iterativa e se comportariam da mesma forma que os conjuntos

28 E. J. Lowe caracteriza o empreendimento da metafísica clássica como uma investigação racional, universal e autônoma sobre absolutamente tudo o que há. Cf. Lowe, E. J. (2002) *A Survey of Metaphysics*. Oxford UK: Oxford University Press, p.3: “(...) this point merely serves to strengthen the claims of metaphysics to be an autonomous and indispensable form of rational enquiry: because the point is that absolutely everything, including even the status and credentials of metaphysics itself, comes within the purview of the universal discipline which metaphysics claims to be.”

29 A sigla NBG é devida aos formuladores da teoria: John von Neumann, Paul Bernays e Kurt Gödel. Já MK é devido a Kelley e Morse. A teoria MK é similar na estratégia de distinção entre conjuntos e classes, mas é mais potente que BNG e, portanto, não são equivalentes.

de ZFC. No entanto, classes próprias seriam introduzidas para expressar totalidades ou agregados que não podem ser membros de outras classes, embora classes próprias possam figurar como a totalidade de todos os conjuntos.

Estratégia II: Essa estratégia está fundada num dilema defendido por Grim (1991: 129) de acordo como o qual ou aceitamos a lógica clássica com sua semântica que revela um mundo incompleto e em expansão indefinida no qual quantificações irrestritas são inviáveis, ou sustentamos a legitimidade de tais quantificações e buscamos uma semântica não clássica para elas. Priest (2013) está entre os filósofos que sustentam que esse dilema proposto por Grim é real e propõe que avancemos na direção de uma semântica baseada na *lógica para-consistente* e no *dialeteísmo*.

Estratégia III: Propõe a quebra do monopólio das semânticas conjuntistas (semânticas fundadas nos mecanismos de teorias dos conjuntos) para construção de modelos de quantificação. Linnebo (2006) abraça essa estratégia ao propor uma semântica fundada em propriedades como valores semânticos de predicados.

Dentro deste quadro geral, a estratégia I figura como a mais conservadora, ao passo que as estratégias II e III representam, cada uma ao seu estilo, rupturas mais drásticas com relação à semântica padrão de orientação tarskiana.

Ao longo do presente artigo tentei apresentar um panorama amplo que oferecesse os meios para um primeiro contato com o debate sobre quantificação em linguagens formais e com alguns dos problemas filosóficos que podem ser levantados a partir deste quadro. Muitos problemas associados ao tópico da quantificação – tais como a quantificação plural, quantificações em linguagens naturais e a relação entre quantificação e modalidades – foram deixados de lado por uma estratégia de apresentação; ressaltando que isso não significa que são eles menos relevantes do que o conteúdo apresentado acima.

Como convém a um texto introdutório, muitas complicações e objeções às teses apresentadas anteriormente foram propositalmente omitidas. Uma ampla discussão dessas objeções não caberia nos limites deste artigo. No entanto, é importante destacar que objeções existem

e elas não são poucas. Muitas vezes, busquei indicar textos mais específicos onde o leitor pode ter acesso a elas. As obras listadas nas referências constituem um bom ponto de partida. Embora o uso de linguagens formais no tratamento de teorias filosóficas tenha crescido vertiginosamente desde o final do século XIX, o cenário de debate sobre quantificação revela ainda muitas questões abertas. Um domínio dessas questões oferece ainda hoje, não só um campo fértil de pesquisa, mas também uma melhor compreensão dos fundamentos das nossas ciências formais.

André Nascimento Pontes
Universidade Federal do Amazonas - UFAM
philospontes@gmail.com

Referências

- Alston, William P. 1958. Ontological commitments. *Philosophical Studies* 9: 8-17.
- Barwise, J. e Cooper, R. 1981. Generalized quantifiers and natural language. *Linguistics and Philosophy* 4: 159-219.
- Belna, Jean-Pierre. 2011. *Cantor*. São Paulo: Estação Liberdade.
- Branquinho, João. 2012. What is existence? *Disputatio* Vol. IX, nº34.
- Cartwright, Richard. 1994. Speaking of Everything. *Noûs* 28: 1-20.
- Davidson, Donald. 1977. The method of truth in metaphysics. *Midwest Studies in Philosophy* Vol. 2, Issue 1: 244-254.
- Dummett, Michael. 1973. *Frege: philosophy of language*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Etchemendy, John. 1990. *The concept of logical consequence*. Harvard, Mass.: Harvard University Press.
- Evans, Gareth e McDowell, John (eds.). 1976. *Truth and Meaning*. Oxford: Oxford University Press.
- Feferman, Salomon. 2005. Predicativity. In Shapiro (ed.) 2005.
- Frege, Gottlob. 1879. *Begriffsschrift*. In van Heijenoort 1967, 1-82.
- Frege, Gottlob. 1884. *Os Fundamentos da Aritmética*. In Col. Os Pensadores – Peirce/Frege. São Paulo: Abril Cultural 1983.
- Frege, Gottlob. 1891. Função e conceito. In Frege, Gottlob. *Lógica e Filosofia da Linguagem*. São Paulo: Edusp 2009.
- Frege, Gottlob. 1892. Sobre o Conceito e o Objeto. In Frege, Gottlob. *Lógica e Filosofia da Linguagem*. São Paulo: Edusp 2009.
- Grim, Patrick. 1991. *The incomplete universe*. Cambridge, Mass.: MIT Press.
- Haack, Susan. 1978. *Philosophy of logics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Hand, Michael. 2007. Objectual and substitutional interpretations of the quantifiers. In Jacquette, 2007.
- Jacquette, Dale. 2007. *Philosophy of logic*. Amsterdam: Elsevier.
- Klement, Kevin C. 2010. Russell, His Paradox, and Cantor's Theorem: Part I. *Philosophical Compass* 5/1, 16-28.
- Kripke, Saul. 1976. Is there a problem about substitutional quantification? In Evans, Gareth e McDowell, John (eds.). 1976.
- Kripke, Saul. 1980. *Naming and Necessity*. Harvard: Harvard University Press.
- Landini, Gregory. 2012. *Frege's Notations: What They Are and How They Mean*. New

- York: Palgrave Macmillan.
- Lindström, Per. 1966. First Order Predicate Logic with Generalized Quantifiers. *Theoria* 32: 186-195.
- Linnebo, Øystein. 2006. Sets, Properties, and Unrestricted Quantification. In Rayo & Uzquiano (2006).
- Linsky, Leonard. 1972. Two concepts of quantification. *Noûs* 6: 224-239.
- Marcus, Ruth B. 1961. *Modalities: Philosophical Essays*. Oxford: Oxford University Press.
- Marcus, Ruth B. 1972. Quantification and Ontology. *Noûs* 6 (3): 240-250.
- Mostowski, Andrzej. 1957. On a Generalization of Quantifiers. *Fundamenta Mathematicae* 44: 12-36.
- Neale, Stephen. 1990. *Descriptions*. Cambridge, Mass.: MIT Press/Bradford Books.
- Peters, Stanley e Westerståhl, Dag. 2006. *Quantifiers in language and logic*. Oxford: Oxford University Press.
- Poincaré, Henri. 1906. Les mathématiques et la logique. *Revue de métaphysique et de morale* 14, 294-317.
- Priest, Graham. 2002. *Beyond the Limits of Thought*. 2^a ed. Oxford: Oxford University Press.
- Priest, Graham. 2008. *An introduction to non-classical logic*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Priest, Graham. 2013. Indefinite extensibility — Dialetheic style. *Studia Logica* 101: 1263-1275.
- Putnam, Hilary. 1981. *Reason, Truth, and History*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Putnam, Hilary. 1990. *Realism with a Human Face*. Harvard: Harvard University Press.
- Quine, W. v. O. 1950. *Methods of Logic*. Holt, Rinehart and Winston: New York.
- Quine, W. v. O. 1953. *From a logical point of view*. 2^a ed. Cambridge, MA.: Harvard University Press.
- Quine, W. v. O. 1966. *The ways of paradoxes and other essays*. New York: Random House.
- Quine, W. v. O. 1972. *Filosofia da Lógica*. Rio de Janeiro: Zahar Editores.
- Rayo, Agustín & Uzquiano, Gabriel. 2006. *Absolute Generality*. Oxford: Oxford University Press.
- Reiter, R. 1980. A logic for default reasoning. *Artificial Intelligence* Vol. 13: 81-132.
- Rescher, Nicholas e Grim, Patrick. 2008. Plenum Theory, *Noûs* 42(3): 422-439.
- Russell, Bertrand. 1905. On Denoting. *Mind* Vol. 14, n°56: 479-493.
- Russell, Bertrand. (1907) On some difficulties in the theory of the transfinite numbers and order types. *Proceedings of the London Mathematical Society* 4: 29-53.
- Sider, Theodore. 2010. *Logic for Philosophy*. Oxford: Oxford University Press.
- Shapiro, Stewart. 1991. *Foundations without foundationalism*. Oxford: Oxford University Press.
- Shapiro, Stewart (ed.) 2005. *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford: Oxford University Press.
- Smullyan, Raymond. 1995. *First-order logic*. New York: Dover Publications, Inc.
- Strawson, P. F. 1961. Singular terms and predication. *Journal of Philosophy* 58 (15): 393-412.
- van Benthem, J. 1983. Determiners and logic. *Linguistics and Philosophy*, Vol. 6 n. 4. Holland: D. Reidel Publishing Company: 447-478.
- van Inwagen, Peter. 2001. *Ontology, Identity and Modality: essays in metaphysics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- van Heijenoort, Jean (ed.). 1967. *From Frege to Gödel*. Cambridge, MA: Harvard University Press.